Dagens 2/2

1. Beräkna gränsvärdet (eller visa att det inte finns):

   a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cos y + y^2\cos x}{x^2 + xy + y^2}$. Tips: undersök gränsvärdet längs linjerna $y = x$ och $y = -x$.

   b. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2 + xy + y^2}$. Tips: inför polära koordinater.

2. Kan funktionen $f(x,y) = \dfrac{y^2 - xy - 2x^2}{y - 2x}$ definieras i punkterna på linjen $y = 2x$ så att f blir kontinuerlig? Tips: $y^2 - xy - 2x^2 = (y - ?)\cdot(y - ??)$ -

3. Beräkna första ordningens partiella derivator till följande funktioner:

   a. $f(x,y) = \dfrac{x - y^2}{1 + xy}$

   b. $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 y}$

   c. $f(x,y,z) = \ln(z^2 + xy)$

4. Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

   a. funktionen $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

   Tips: Sätt $t = \dfrac{y}{x}$. Vi har då $z = f(t)$ och $z'_x = f'(t)\cdot t'_x = f'(t)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$.

   b. funktionen $z = f(2x^2 + 3y^2)$ uppfyller ekvationen $3y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

   c. funktionen $z = xyf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ uppfyller ekvationen $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

5. Beräkna de partiella derivatorna av andra ordningen till följande funktioner:

   a. $f(x,y) = xy^2 + \dfrac{y}{x}$ b. $f(x,y) = \arctan\dfrac{1 - 2xy}{2x + y}$

6. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan

   a. $z = x\ln(5x - 2y)$ i punkten (1,2,0) b. $z = \dfrac{8x}{y} - xy + 1$ i punkten (1,2,3).

Svar:

1. a. Finns inte. b. 0.
2. f blir kontinuerlig i hela xy-planet om man i varje punkt på linjen $y = 2x$ definierar $f(x,y) = x + y$.
3. a. $f'_x = \dfrac{1 + y^3}{(1 + xy)^2}$, $f'_y = -\dfrac{2y + x^2 + xy^2}{(1 + xy)^2}$ b $f'_x = \dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2 y}}$, $f'_y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1 + x^2 y}}$

   c. $f'_x = \dfrac{y}{z^2 + xy}$, $f'_y = \dfrac{x}{z^2 + xy}$, $f'_z = \dfrac{2z}{z^2 + xy}$

5. a. $f''_{xx} = \dfrac{2y}{x^3}$, $f''_{yy} = 2x$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 2y - \dfrac{1}{x^2}$

   b. $f''_{xx} = \dfrac{16x}{(4x^2 + 1)^2}$, $f''_{yy} = \dfrac{2y}{(y^2 + 1)^2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = 0$

6. a. $5x - 2y - z = 1$ b. $2x - 3y - z + 7 = 0$

Dagens 4/2

7. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = 2u + 3v,\ y = 4u - 6v$ får vi en ny funktion $z = f(2u + 3v,\ 4u - 6v)$ av variabler *u* och *v*. Bestäm $3z'_u - 2z'_v$.
Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 2f'_x + 4f'_y$.

8. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = 2u + 3v,\ y = \frac{u}{v}$ får vi en ny funktion $z = f(2u + 3v,\ \frac{u}{v})$ av variabler *u* och v. Bestäm $uz'_u + vz'_v$.
Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = 2f'_x + \frac{1}{v}f'_y$.

9. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan
   a. $x^3 + 2y^3 + 3z^3 + xyz = 7$ punkten (2,-1,1).
   b. $xy^3 + \frac{9y}{z} - x^3z^2 = 5$ i punkten (1,2,3).
   c. $\frac{z}{x - y^2} + \ln(z - xy) = 3$ i punkten (2,1,3).

10. Beräkna den vinkel som tangenplanet till ytan $2x^3 - x^2y - y^3 - 2z + z^3 = 8$ i punkten (1,-1,2) bildar med *xy*-planet. Bestäm även tangentplanets ekvation.

11. I vilken punkt är planet $2x + y - 3z = 8$ tangentplan till ellipsoiden $x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$.

12. Beräkna riktningsderivatan till funktionen $f(x,y) = xy^2 + \frac{y}{x}$ i punkten (1,2) i riktning av vektorn **v** = (3,4).

12. Beräkna den mot vektorn **v** = (0,-3,4) svarande riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = x\arctan\frac{y}{z}$ i punkten (5,2,-1).

14. I vilken riktning bör punkten (*x*,*y*) röra sig utgående från (1,2) för att värdet av $xy - 5\ln(x + y^2)$ skall växa så snabbt som möjligt?

15. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion. Genom substitutionen $x = uv,\ y = \frac{u}{v}$ får vi en ny funktion $f(uv, \frac{u}{v})$ av variablerna *u* och *v*. Bestäm $uz'_u + vz'_v$.
Tips: Enligt kedjeregeln har vi $z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u = vf'_x + \frac{1}{v}f'_y$.

Svar

7. $24f'_y$
8. xf'_x
9 a. $11x + 8y + 7z = 21$ b. $19x - 15y + 8z = 13$ c. $2x - 2y - z + 1 = 0$
10. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$, $4x - 2y + 5z = 16$
11. (2,1,-1)
12. 26/5
13. -1
14. (1,-3)
15. $2xf'_x$